التكـــــــــامل

1- تعريف تكامل في حالة دالة معرفة وموجبة في المجال $[a:b]$

1-1- تعريف: وحدة المساحة

(p) مستوي مرفق بمعلم متعامد $(O;I;J)$. نسمي وحدة مساحة ونرمز لها $(u.a)$

مساحة المستطيل $OIKJ$. 1 u.a=(مساحة المستطيل $OIKJ$).

2-1- تعريف:

(p) مستوي مزود بمعلم متعامد: $(o,\vec{i},\vec{j})$.

ليكن: a و b عددان حقيقيان حيث $a \leq b$ و f دالة مستمرة و موجبة على المجال $[a:b]$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المعلم $(o,\vec{i},\vec{j})$.

مساحة حيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و محور الفواصل و المستقيمين

$(x=a)$ $(x=b)$, هي العدد الحقيقي : $F(a)-F(b)$.

حيث F هي الدالة الأصلية للدالة f.

الرسم:

2-1- تعريف:

F هي الدالة الأصلية للدالة f على المجال I و a,b عددان من I حيث: $a \leq b$.

نسمي العدد $F(a)-F(b)$ التكامل من a إلى b لــ f.

ونرمز: $\int_a^b f(x)\,dx$ و نقرأ: (التكامل من a إلى b لــ $f(x)$ تفاضل x).

نكتب: $\int_a^b f(x)\,dx = F(a)-F(b)\,u.a$.

مثال: احسب $\int_a^b f(x)\,dx$. مع الرسم. حسب كل حالة

- f دالة معرفة على ℝ حيث $f(x)=4$.
- f دالة معرفة على ℝ حيث $f(x)=x-3$.
- f دالة معرفة على ℝ حيث $f(x)=x^2$

ملاحظات:

1- لحساب التكامل يجب حساب أولا الدالة الأصلية على المجال ثم حساب التكامل أي المساحة.

2- يمكن تغيير المتغير x بحرف آخر مثل q,t .... ويكون: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$.

تطبيق: أحسب التكاملات: $\int_{-1}^{2}(-5x^2+1)\,dx$ و $\int_0^1 e^{2x-3}\,dx$ و $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$.

خواص التكاملات: f و g دالتان مستمرتان على المجال $[a:b]$

1- علاقة شال: $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$ ....البرهان.

حالات خاصة: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ و $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

2- الخطية: $\int_a^b k.f(x)\,dx = k.\int_a^b f(x)\,dx$ و $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

3- المقارنة:

- إذا كان من اجل كل x من $[a:b]$: $f(x) \geq 0$ فإن: $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.
- إذا كان من اجل كل x من $[a:b]$: $f(x) \leq 0$ فإن: $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$.
- إذا كان من اجل كل x من $[a:b]$: $f(x) \leq g(x)$ فإن: $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

تطبيق:

1- أحسب التكامل $\int_0^3 |x^2-1|\,dx$.

2- نعتبر التكاملين: $A=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,dx$ و $B=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,dx$. أحسب $A+B$ و $A-B$ ثم استنتج A و B.

القيمة المتوسطة:

1- القيمة المتوسطة لدالة على مجال:

تعريف: f دالة مستمرة على المجال $[a;b]$. القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a;b]$ هي العدد الحقيقي: $m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

الرسم:

2- حصر القيمة المتوسطة:

f دالة مستمرة على المجال $[a;b]$. إذا وجد عددان حقيقيان m و M بحيث من أجل كل x من $[a;b]$. $m\le f(x)\le M$ فإن: $m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$. أي:

$$m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\le M$$

تطبيق: نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$: $f(x)=1+\ln(x+1)$.

1- أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;e-1]$.

2- استنتج حصرا لـ $f(x)$.

3- استنتج حصرا للعدد الحقيقي $K=\int_1^{e-1} f(x)\,dx$.

حالات أخرى من التكاملات:

1- في حالة f دالة سالبة على المجال $[a;b]$ فإن مساحة الحيز A :

$$A=\int_a^b -f(x)\,dx=\int_b^a f(x)\,dx$$

2- في حالة f دالة تغير إشارتها على المجال $[a;b]$ فإن مساحة الحيز A :

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c -f(x)\,dx+\int_c^d f(x)\,dx+\int_d^b -f(x)\,dx$$

الرسم:

التكامل بالتجزئة:

لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I بحيث أن الدالتين المشتقتين لهما u' و v' مستمرتان على I.

من اجل كل عددين حقيقيين a و b من I لدينا :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

ملاحظة: في اغلب الأحيان يستعمل التكامل بالتجزئة في حالة $f(x)$ تساوي: $p(x)\ln x$, $p(x)e^x$, $p(x)\cos x$, $p(x)\sin x$ حيث $p(x)$ كثير حدود.

امثلة:

1- احسب $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$. نضع: $\begin{cases}u(x)=x\\v'(x)=\cos x\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}u'(x)=1\\v(x)=\sin x\end{cases}$ ثم الحساب.

2- احسب $\int_1^2 x\ln x\,dx$. نضع: $\begin{cases}u(x)=\ln x\\v'(x)=x\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}u'(x)=\frac{1}{x}\\v(x)=\frac{1}{2}x^2\end{cases}$ ثم الحساب.

تمرين: باستعمال التكامل بالتجزئة احسب التكاملات التالية:

$$\int_1^e (3x-1)\ln x\,dx\ ,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\cos x\,dx\ ,\ \int_{-2}^0 x\sqrt{1-x}\,dx\ ,\ \int_1^3 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$$